MATEMATIKA KELAS X SMA

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Pengenalan Konsep, Metode Penyelesaian, dan Contoh Soal Pembahasan

1. Pengenalan Persamaan Linear Tiga Variabel (PLTV)

Sebelum mempelajari Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV), mari kita pahami terlebih dahulu apa itu **Persamaan Linear Tiga Variabel (PLTV)**.

Definisi PLTV

Persamaan Linear Tiga Variabel (PLTV) adalah sebuah persamaan matematika yang memuat **tiga variabel** berbeda, di mana masing-masing variabel berpangkat tertinggi **satu** (linear).
Bentuk Umum PLTV:

$$ax + by + cz = d$$

Keterangan Komponen:

- x, y, z = **Variabel** (nilai yang belum diketahui nilainya).
- a, b, c = **Koefisien** dari variabel $x, y,$ dan z ($a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a, b, c \neq 0$).
- d = **Konstanta** (suku tetap berwujud bilangan real).

Contoh PLTV dalam kehidupan sehari-hari:

- $2x + 3y + z = 15.000$ (Bisa merepresentasikan harga 2 buku, 3 pensil, dan 1 penghapus).
- $x - 2y + 4z = 8$

2. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Jika beberapa PLTV dikumpulkan dan saling berkaitan satu sama lain untuk mencari nilai variabel yang memenuhi seluruh persamaan tersebut, maka kumpulan persamaan tersebut dinamakan **Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)**.

Bentuk Umum SPLTV

Suatu SPLTV yang terdiri atas 3 persamaan dapat dituliskan dalam bentuk baku:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{— (Persamaan 1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \text{— (Persamaan 2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \text{— (Persamaan 3)} \end{cases}$$

Himpunan Penyelesaian (HP): Penyelesaian dari SPLTV adalah urutan pasangan terurut (x, y, z) yang memenuhi **ketiga** persamaan tersebut secara bersamaan.

3. Metode Penyelesaian SPLTV

Metode yang paling efektif dan umum digunakan di tingkat SMA adalah **Metode Campuran (Eliminasi – Substitusi)**.

Langkah-Langkah Penyelesaian Metode Campuran

1. **Langkah 1 (Eliminasi 1):** Pilih dua pasang persamaan dari tiga persamaan yang ada, lalu eliminasi (hilangkan) salah satu variabel (misalnya variabel z) dari kedua pasang persamaan tersebut. Hasilnya adalah **dua persamaan linear baru dengan dua variabel (SPLDV)**.
2. **Langkah 2 (Selesaikan SPLDV):** Selesaikan sistem SPLDV tersebut menggunakan metode eliminasi/substitusi untuk mendapatkan nilai dari **dua variabel** pertama (misalnya nilai x dan y).
3. **Langkah 3 (Substitusi Akhir):** Substitusikan nilai dua variabel yang sudah ditemukan ke salah satu persamaan awal (Persamaan 1, 2, atau 3) untuk mendapatkan nilai **variabel ketiga** (misalnya z).
4. **Langkah 4 (Tuliskan HP):** Tuliskan himpunan penyelesaian dalam bentuk HP $= \{(x, y, z)\}$.

4. Contoh Soal & Pembahasan Lengkap

Contoh Soal: Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLTV

Tentukan Himpunan Penyelesaian (HP) dari Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel berikut:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 & \text{— (1)} \\ 2x - y + z = 7 & \text{— (2)} \\ x + 2y - z = 6 & \text{— (3)} \end{cases}$$

PEMBAHASAN LANGKAH DEMI LANGKAH:

Langkah 1: Mengeliminasi variabel z untuk membentuk SPLDV

Pasangan A: Mengeliminasi z dari Persamaan (1) dan Persamaan (2)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2x - y + z &= 7 \quad \text{— (Kurangkan kedua persamaan)} \\ \hline (x - 2x) + (y - (-y)) + (z - z) &= 12 - 7 \\ -x + 2y &= 5 \quad \text{— (Persamaan 4)} \end{aligned}$$

Pasangan B: Mengeliminasi z dari Persamaan (1) dan Persamaan (3)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ x + 2y - z &= 6 \quad \text{— (Jumlahkan kedua persamaan)} \\ \hline (x + x) + (y + 2y) + (z + (-z)) &= 12 + 6 \\ 2x + 3y &= 18 \quad \text{— (Persamaan 5)} \end{aligned}$$

Langkah 2: Menyelesaikan SPLDV dari Persamaan (4) dan Persamaan (5)

Dari Langkah 1, kita memperoleh SPLDV:

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 & \text{— (4)} \\ 2x + 3y = 18 & \text{— (5)} \end{cases}$$

Kita eliminasi variabel x. Samakan koefisien x dengan mengalikan Persamaan (4) dengan 2:

$$\begin{aligned} -x + 2y = 5 \quad &\xrightarrow{\times 2} \quad -2x + 4y = 10 \\ 2x + 3y = 18 \quad &\xrightarrow{\times 1} \quad 2x + 3y = 18 \quad \text{— (Jumlahkan)} \\ \hline 0 + 7y &= 28 \\ y &= \frac{28}{7} = 4 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai $y = 4$ ke Persamaan (4):

$$\begin{aligned} -x + 2(4) &= 5 \\ -x + 8 &= 5 \\ -x &= 5 - 8 \\ -x &= -3 \implies x = 3 \end{aligned}$$

Langkah 3: Substitusi nilai $x = 3$ dan $y = 4$ ke Persamaan (1)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 3 + 4 + z &= 12 \\ 7 + z &= 12 \\ z &= 12 - 7 = 5 \end{aligned}$$

Kesimpulan: Nilai $x = 3$, $y = 4$, dan $z = 5$.

Rangkuman & Tips Utama

- **Kunci Utama:** Selalu konsisten mengeliminasi **variabel yang sama** di langkah pertama untuk membentuk SPLDV.
- **Ciri SPLTV Memiliki 1 Penyelesaian:** Diperoleh nilai tunggal (x, y, z).
- **Verifikasi Jawaban:** Kamu bisa menguji kebenaran jawaban dengan memasukkan $(3, 4, 5)$ ke ketiga persamaan awal. Jika ketiganya benar, maka penyelesaianmu 100% tepat!