

MATERI MATEMATIKA WAJIB KELAS X

BAB: BARISAN DAN DERET GEOMETRI

A. PENGERTIAN DAN KONSEP DASAR

Dalam matematika, selain pola bilangan yang memiliki beda/selisih tetap (barisan aritmatika), terdapat pula pola bilangan yang bertambah atau berkurang dengan kelipatan pengali tertentu yang tetap. Peristiwa seperti pembelahan sel/bakteri, peluruhan zat radioaktif, bunga majemuk, hingga pantulan bola jatuh merupakan penerapannya.

Perbedaan Barisan dan Deret Geometri

- **Barisan Geometri** adalah urutan bilangan di mana rasio (perbandingan) antara dua suku berurutan selalu tetap.
 - *Contoh:* 3, 6, 12, 24, 48, ... (setiap suku dikali 2)
- **Deret Geometri** adalah penjumlahan suku-suku dari suatu barisan geometri.
 - *Contoh:* $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$

B. BARISAN GEOMETRI

1. Definisi dan Rasio (r)

Barisan Geometri adalah suatu barisan bilangan yang hasil bagi (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu bernilai tetap. Rasio ini disimbolkan dengan r , dan suku pertama disimbolkan dengan a atau U_1 .

2. Rumus Rasio (r) dan Suku Ke- n (U_n)

Rumus Rasio dan Suku Ke- n Barisan Geometri

Rumus Rasio (r):

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots$$

Rumus Suku Ke- n (U_n):

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Keterangan:

- U_n = Suku ke- n
- a = Suku pertama (U_1)
- r = Rasio (pembandingan antar suku)
- n = Banyaknya suku ($n \in \mathbb{N}$)

- Jika $r > 1$, maka barisan dinamakan **barisan geometri naik** (konvergen membesar).
- Jika $0 < r < 1$, maka barisan dinamakan **barisan geometri turun** (semakin mengecil).
- Jika $r < 0$, maka tanda nilai tiap suku akan **berganti-ganti (positif-negatif)**.

3. Suku Tengah Barisan Geometri (U_t)

Jika banyaknya suku pada barisan geometri bernilai ganjil (n ganjil), maka suku tengah (U_t) terletak pada posisi ke- $k = \frac{n+1}{2}$:

$$U_t = \sqrt{a \cdot U_n} \quad \text{dengan} \quad a \cdot U_n > 0$$

4. Sisipan pada Barisan Geometri

Jika di antara dua suku berurutan suatu barisan geometri disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga terbentuk barisan geometri baru, maka rasio barisan baru (r') adalah:

$$r' = \sqrt[k+1]{r}$$

Catatan: Jika $k + 1$ bernilai genap dan $r > 0$, maka rasio baru bisa bernilai positif atau negatif ($r' = \pm \sqrt[k+1]{r}$).

C. DERET GEOMETRI

1. Definisi

Deret Geometri adalah jumlah dari n suku pertama dari barisan geometri ($S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$).

2. Rumus Jumlah n Suku Pertama (S_n)

Rumus Jumlah n Suku Pertama (S_n)

1. Untuk rasio $r > 1$:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

2. Untuk rasio $r < 1$ (dan $r \neq 1$):

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

3. Hubungan U_n dengan S_n

Suku ke- n dapat dihitung dari selisih jumlah n suku pertama dengan jumlah $(n - 1)$ suku pertama:

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

4. Deret Geometri Tak Hingga (S_{∞})

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki suku tak terbatas ($n \rightarrow \infty$).

Rumus Deret Geometri Tak Hingga

Suatu deret geometri tak hingga dikatakan **Konvergen** (memiliki jumlah) jika rasionya memenuhi:

$$-1 < r < 1 \quad \text{atau} \quad |r| < 1$$

Rumus jumlah tak hingga (S_{∞}):

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

Catatan: Jika $|r| \geq 1$, maka deret dinamakan **Divergen** dan nilai $S_{\infty} = \pm\infty$.

D. CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Contoh 1: Menentukan Rasio dan Suku Ke- n

Diketahui barisan geometri: 2, 6, 18, 54, ...

Tentukan: a. Suku pertama (a) dan rasio (r) b. Suku ke-7 (U_7)

Pembahasan:

a. Suku pertama $a = 2$.

$$\text{Rasio } r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{2} = 3.$$

b. $U_7 = a \cdot r^{7-1} = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1.458.$

Contoh 2: Menentukan Suku Jika Dua Suku Lain Diketahui

Diketahui suku ke-3 suatu barisan geometri adalah 12 dan suku ke-6 adalah 96. Tentukan suku ke-8!

Pembahasan:

Gunakan rumus $U_n = a \cdot r^{n-1}$:

$$U_3 = a \cdot r^2 = 12 \quad \text{— (Persamaan 1)}$$

$$U_6 = a \cdot r^5 = 96 \quad \text{— (Persamaan 2)}$$

Bagi Persamaan 2 dengan Persamaan 1:

$$\frac{a \cdot r^5}{a \cdot r^2} = \frac{96}{12} \implies r^3 = 8 \implies r = 2$$

Substitusi $r = 2$ ke Persamaan 1:

$$a \cdot (2)^2 = 12 \implies 4a = 12 \implies a = 3$$

Maka, suku ke-8 (U_8) adalah:

$$U_8 = a \cdot r^7 = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$$

Contoh 3: Menghitung Jumlah n Suku Pertama

Hitunglah jumlah 6 suku pertama dari deret geometri: $3 + 6 + 12 + 24 + \dots$

Pembahasan:

Diketahui $a = 3$, $r = \frac{6}{3} = 2$ (karena $r > 1$, gunakan rumus pertama):

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{3(64 - 1)}{1} = 3 \times 63 = 189$$

Contoh 4: Aplikasinya pada Pantulan Bola (Deret Tak Hingga)

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 8 meter. Setiap kali memantul di lantai, bola mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang seluruh lintasan bola hingga berhenti!

Pembahasan:

Lintasan bola terdiri dari **lintasan turun** dan **lintasan naik**.

- Lintasan turun awal = 8 m.

- Rasio pantulan $r = \frac{3}{4}$.

Cara Praktis / Cepat:

Jika bola dijatuhkan dari tinggi h dan memantul dengan rasio $r = \frac{p}{q}$, maka panjang total lintasan (L) adalah:

$$L = h \times \left(\frac{q+p}{q-p} \right)$$

Dengan $h = 8$, $p = 3$, $q = 4$:

$$L = 8 \times \left(\frac{4+3}{4-3} \right) = 8 \times \frac{7}{1} = 56 \text{ meter}$$

Jadi, panjang seluruh lintasan bola sampai berhenti adalah **56 meter**.

Contoh 5: Soal Cerita Pertumbuhan Bakteri

Setiap 15 menit, suatu jenis bakteri membelah diri menjadi 2. Jika awal pengamatan terdapat 20 bakteri, berapa banyak bakteri setelah 2 jam?

Pembahasan:

- Jumlah awal (a) = 20.
- Pembelahan menjadi 2, maka rasio (r) = 2.
- Waktu total = 2 jam = 120 menit.
- Frekuensi membelah $n = \frac{120}{15} = 8$ kali.

Banyaknya bakteri setelah 8 kali membelah adalah suku ke- $(n+1)$ dari barisan geometri (karena U_1 adalah kondisi awal):

$$U_9 = a \cdot r^8 = 20 \cdot 2^8 = 20 \cdot 256 = 5.120 \text{ bakteri}$$

Jadi, terdapat **5.120 bakteri** setelah 2 jam.

E. LATIHAN SOAL MANDIRI

- Diketahui barisan geometri: 162, 54, 18, 6, ...
 - Tentukan suku pertama (a) dan rasionya (r).
 - Tentukan nilai dari suku ke-6 (U_6).
- Suatu barisan geometri memiliki suku ke-2 sebesar 10 dan suku ke-5 sebesar 80.
 - Hitunglah rasio (r) dan suku pertama (a).
 - Tentukan rumus suku ke- n (U_n).
- Hitunglah jumlah 7 suku pertama (S_7) dari deret geometri: $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$
- Diketahui suatu deret geometri tak hingga mempunyai suku pertama $a = 24$ dan jumlah tak hingga $S_\infty = 36$. Tentukan rasio (r) dari deret tersebut.
- Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 12 meter dan memantul kembali dengan tinggi $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelumnya secara terus-menerus. Hitunglah total panjang lintasan bola tersebut sampai berhenti.