

MATERI MATEMATIKA WAJIB KELAS X

BAB: BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

A. PENGERTIAN DAN KONSEP DASAR

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menemui pola yang teratur, seperti penambahan jumlah tabungan yang tetap setiap bulan, penambahan tinggi tanaman, atau penataan kursi di gedung pertunjukan. Pola bilangan berpola tetap seperti ini dipelajari dalam **Barisan dan Deret Aritmatika**.

Perbedaan Barisan dan Deret

- **Barisan Bilangan** adalah urutan bilangan-bilangan yang disusun berdasarkan aturan atau pola tertentu. Anggota dari barisan dinamakan **suku** dan dilambangkan dengan U_n (suku ke- n).
 - *Contoh:* 2, 5, 8, 11, 14, ...
- **Deret Bilangan** adalah penjumlahan dari suku-suku pada barisan bilangan.
 - *Contoh:* $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \dots$

B. BARISAN ARITMATIKA

1. Definisi

Barisan Aritmatika adalah suatu barisan bilangan yang selisih (beda) antara dua suku yang berurutan selalu tetap (konstan). Selisih konstan tersebut dinamakan **beda** dan disimbolkan dengan b . Suku pertama dari barisan dinotasikan dengan a atau U_1 .

2. Beda (b) dan Suku Ke- n (U_n)

Rumus Beda dan Suku Ke- n

Rumus Beda (b):

$$b = U_n - U_{n-1} = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots$$

Rumus Suku Ke- n (U_n):

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

- U_n = Suku ke- n
- a = Suku pertama (U_1)
- b = Beda (selisih antar suku)
- n = Banyaknya suku ($n \in \mathbb{N}$)

- Jika $b > 0$, maka barisan dinamakan **barisan aritmatika naik** (nilainya semakin besar).
- Jika $b < 0$, maka barisan dinamakan **barisan aritmatika turun** (nilainya semakin kecil).

3. Suku Tengah Barisan Aritmatika (U_t)

Jika suatu barisan aritmatika memiliki banyak suku bernilai ganjil (n ganjil), maka terdapat suku tengah (U_t) pada posisi ke- k :

$$U_t = \frac{a + U_n}{2} \quad \text{dengan} \quad k = \frac{n + 1}{2}$$

4. Sisipan pada Barisan Aritmatika

Jika di antara dua suku berurutan suatu barisan aritmatika disisipkan sebanyak k buah bilangan sehingga terbentuk barisan aritmatika baru, maka beda barisan yang baru (b') adalah:

$$b' = \frac{b}{k + 1}$$

C. DERET ARITMATIKA

1. Definisi

Deret Aritmatika adalah jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan aritmatika. Jika barisan aritmatikanya adalah $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$, maka deret aritmatikanya adalah:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

2. Rumus Jumlah n Suku Pertama (S_n)

Rumus Jumlah n Suku Pertama (S_n)

1. Jika suku terakhir (U_n) diketahui:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

2. Jika suku terakhir (U_n) tidak diketahui:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]$$

3. Hubungan Antara U_n dan S_n

Suku ke- n (U_n) dapat dicari jika nilai S_n (jumlah n suku pertama) diketahui:

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

D. CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Contoh 1: Menentukan Suku ke- n

Diketahui barisan aritmatika: 3, 7, 11, 15, 19, ...

Tentukan: a. Suku pertama (a) dan beda (b) b. Rumus suku ke- n (U_n) c. Suku ke-25 (U_{25})

Pembahasan:

a. Suku pertama (a) = 3, Beda (b) = $U_2 - U_1 = 7 - 3 = 4$.

b. $U_n = a + (n - 1)b \implies U_n = 3 + (n - 1)4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$.

c. $U_{25} = 4(25) - 1 = 100 - 1 = 99$.

Contoh 2: Menentukan Banyaknya Suku (n)

Diketahui barisan aritmatika: 8, 13, 18, 23, ..., 108. Banyaknya suku pada barisan tersebut adalah...

Pembahasan:

Diketahui $a = 8$, $b = 13 - 8 = 5$, dan suku terakhir $U_n = 108$.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$108 = 8 + (n - 1)5$$

$$100 = 5(n - 1) \implies 20 = n - 1 \implies n = 21$$

Jadi, banyaknya suku pada barisan tersebut adalah **21**.

Contoh 3: Menentukan Suku Jika Dua Suku Lain Diketahui

Suatu barisan aritmatika memiliki suku ke-5 bernilai 18 dan suku ke-9 bernilai 34. Tentukan suku ke-15!

Pembahasan:

Dari rumus $U_n = a + (n - 1)b$, diperoleh:

$$U_5 = a + 4b = 18 \quad \text{— (Persamaan 1)}$$

$$U_9 = a + 8b = 34 \quad \text{— (Persamaan 2)}$$

Kurangkan Persamaan 2 dengan Persamaan 1:

$$(a + 8b) - (a + 4b) = 34 - 18 \implies 4b = 16 \implies b = 4$$

Substitusi $b = 4$ ke Persamaan 1:

$$a + 4(4) = 18 \implies a + 16 = 18 \implies a = 2$$

Hitung suku ke-15 (U_{15}):

$$U_{15} = a + 14b = 2 + 14(4) = 2 + 56 = 58$$

Contoh 4: Menghitung Jumlah Deret Aritmatika

Hitunglah jumlah 20 suku pertama dari deret aritmatika: $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$

Pembahasan:

Diketahui $a = 5$, $b = 3$, dan $n = 20$.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(5) + (20 - 1)3] = 10 [10 + 19(3)] = 10 [10 + 57] = 10 \times 67 = 670$$

Contoh 5: Soal Cerita (Aplikasi Konsep Aritmatika)

Sebuah gedung pertunjukan memiliki 12 baris kursi. Baris pertama berisi 15 kursi, baris kedua 19 kursi, baris ketiga 23 kursi, dan seterusnya bertambah 4 kursi tiap baris. Hitunglah total seluruh kursi!

Pembahasan:

Diketahui $a = 15$, $b = 4$, $n = 12$. Total kursi adalah S_{12} :

$$S_{12} = \frac{12}{2} [2(15) + (12 - 1)4] = 6 [30 + 11(4)] = 6 [30 + 44] = 6 \times 74 = 444$$

Jadi, total seluruh kursi di dalam gedung adalah **444 kursi**.

E. LATIHAN SOAL MANDIRI

- Diketahui barisan aritmatika: 12, 17, 22, 27, ...
 - Tentukan suku pertama dan bedanya.
 - Tentukan suku ke-30 barisan tersebut.
- Rumus suku ke- n suatu barisan aritmatika dinyatakan oleh $U_n = 5n - 3$. Tentukan:
 - Suku ke-1 dan suku ke-2.
 - Beda dari barisan tersebut.
 - Nilai dari suku ke-18.
- Diketahui suku ke-3 suatu barisan aritmatika adalah 11 dan suku ke-8 adalah 31.
 - Carilah suku pertama (a) dan beda (b).
 - Tentukan rumus suku ke- n .
 - Hitunglah nilai dari suku ke-20.
- Hitunglah jumlah dari 30 suku pertama dari deret aritmatika: $4 + 10 + 16 + 22 + \dots$
- Sebuah perusahaan memproduksi sepatu. Pada bulan pertama perusahaan memproduksi 1.000 pasang sepatu. Setiap bulan berikutnya produksi ditambah 150 pasang sepatu secara tetap.
 - Berapa pasang sepatu yang diproduksi pada bulan ke-10?
 - Berapa total pasang sepatu yang diproduksi selama 10 bulan pertama?

KUNCI JAWABAN LATIHAN SOAL

- a.** $a = 12, b = 5$ **b.** $U_{30} = 12 + 29(5) = 157$
- a.** $U_1 = 2, U_2 = 7$ **b.** $b = 5$ **c.** $U_{18} = 5(18) - 3 = 87$
- a.** $a = 3, b = 4$ **b.** $U_n = 4n - 1$ **c.** $U_{20} = 79$
- $S_{30} = \frac{30}{2} [2(4) + 29(6)] = 15[8 + 174] = 15 \times 182 = 2.730$
- a.** $U_{10} = 1.000 + 9(150) = 2.350$ pasang **b.** $S_{10} = \frac{10}{2} [1.000 + 2.350] = 16.750$ pasang